Serviço Geológico do Brasil – CPRM

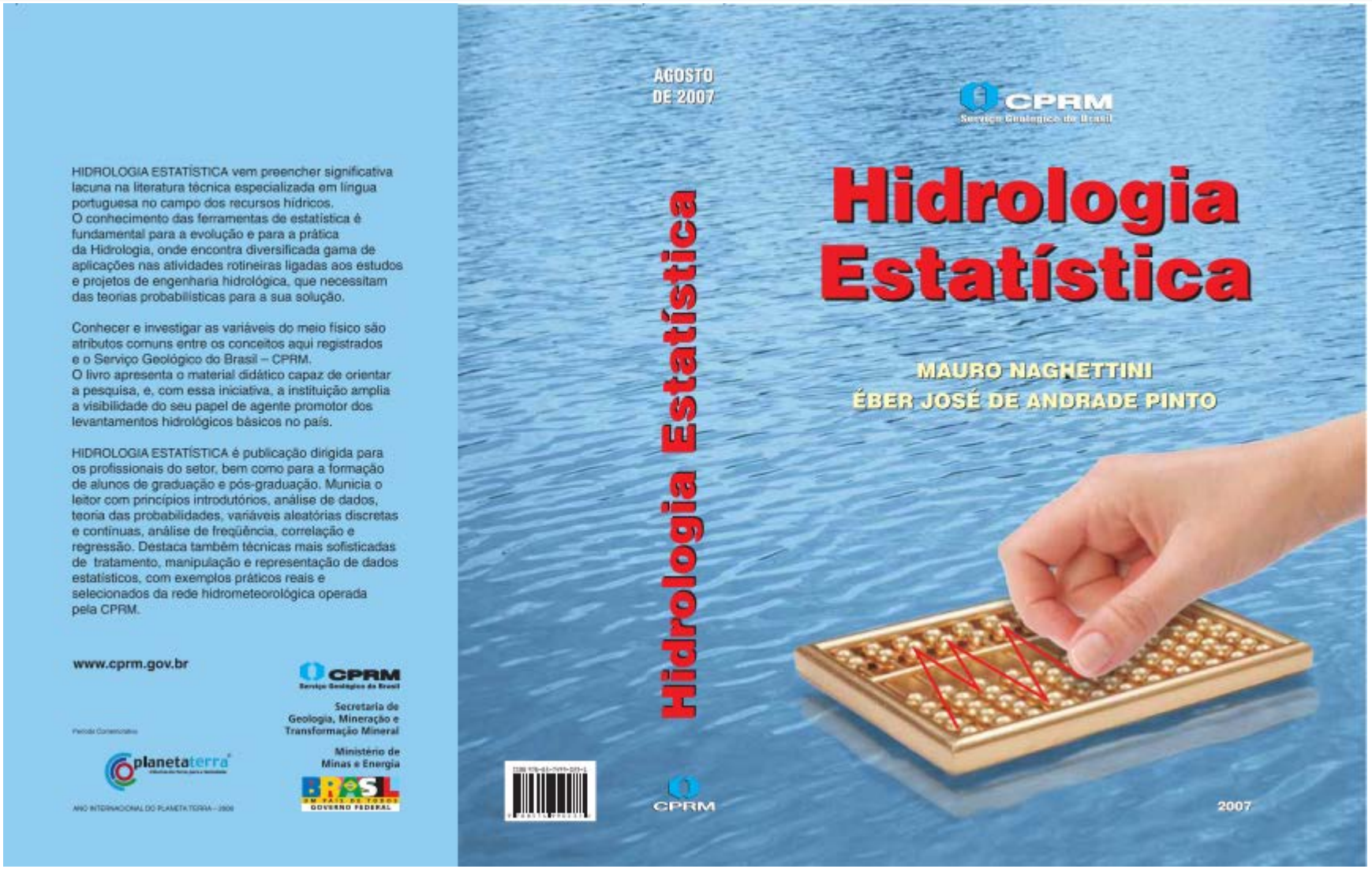
Correlação e Regressão Linear

Aula 02 : RLS

Eber José de Andrade Pinto
Coordenador Executivo do DEHID
eber.andrade@cprm.gov.br
www.cprm.gov.br

Belo Horizonte, 20 de outubro de 2020

Livro Texto



http://www.cprm.gov.br/publique/Hidrologia/Mapas-e-Publicacoes/Livro-%22Hidrologia-Estatistica%22-981.html

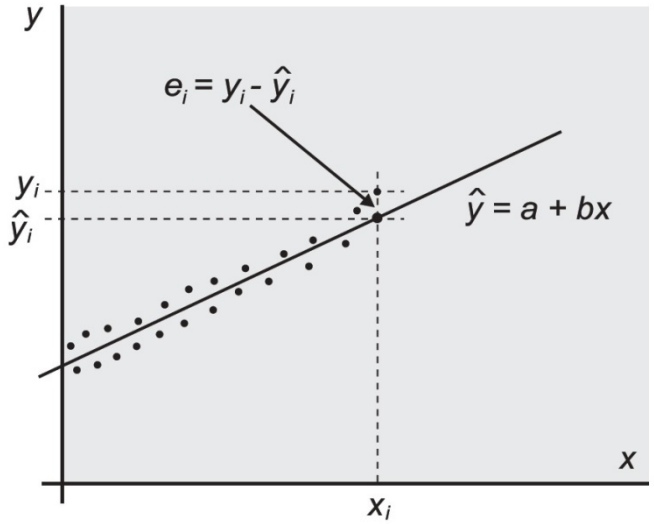
Inferência estatística

- É uma das partes da *Estatística* que tem por objetivo a coleta, redução, análise e modelagem dos dados, a partir do que, finalmente, faz-se a inferência para uma população da qual os dados (a amostra) foram obtidos.
- Um aspecto importante da modelagem dos dados é fazer *previsões*, a partir das quais se podem tomar decisões.

Modelos

- Quando se procede a uma análise de dados, busca-se alguma forma de *regularidade* ou *padrão* ou, ainda, *modelo*, presente nas observações.
- Os pontos da Figura não estão todos, evidentemente, sobre uma reta; essa seria o nosso padrão ou modelo. A diferença entre os dados e o modelo constitui os *resíduos*.

Dados = Modelo + Resíduos



ou, ainda,

$$D = M + R$$

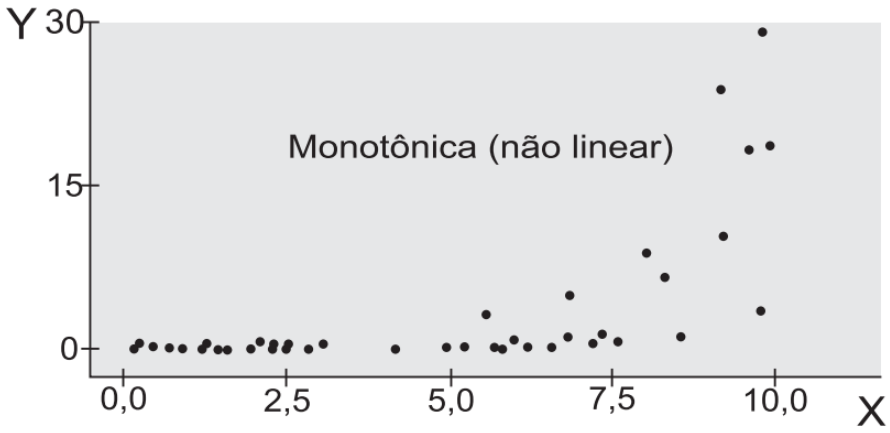
A parte *M* é também chamada *parte suave* dos dados, enquanto *R* é a *parte aleatória*.

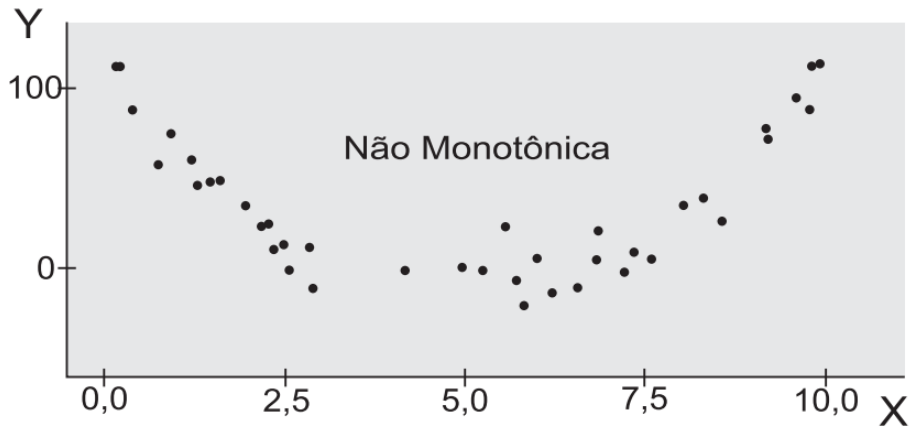
- A parte *R* é tão importante quanto *M*, e a análise dos resíduos constitui uma parte fundamental de todo trabalho estatístico.
- Basicamente, são os resíduos que nos dizem se o modelo é adequado ou não para representar os dados.

Objetivo 2 : Regressão

Definir a forma da associação entre as VA's

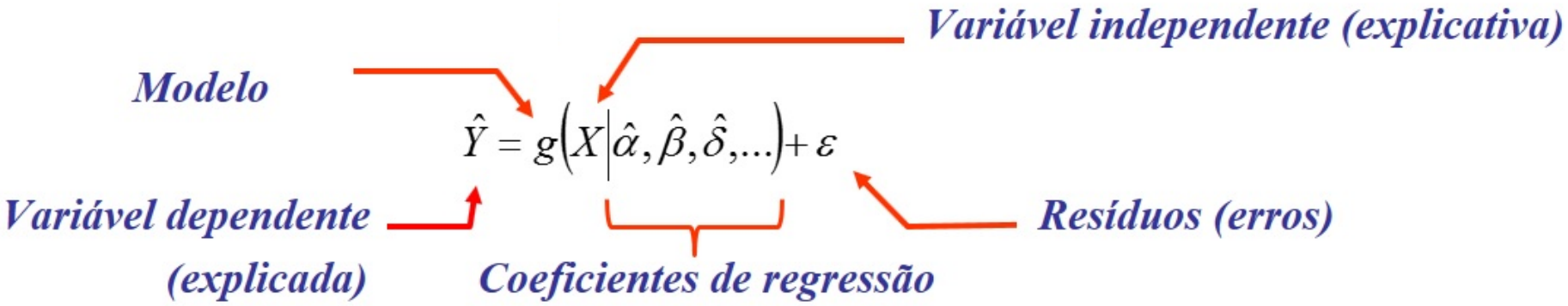
Abordagem Exploratória: Associações Monotônicas Lineares e Não-Lineares





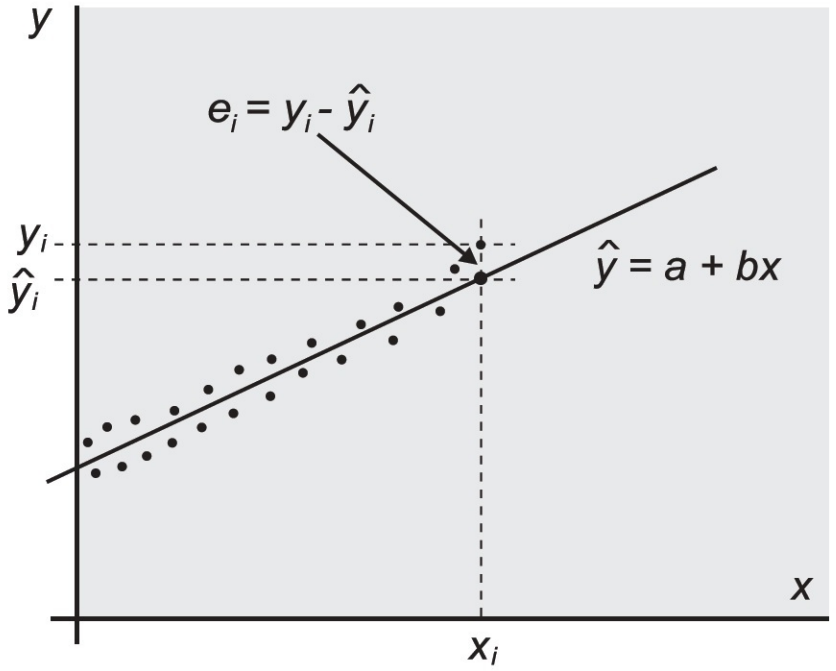
Abordagem Quantitativa: estabelecer a forma matemática (modelo de regressão) da associação entre as VA's, por meio do uso sistemático de algum critério de minimização dos 'resíduos' (erros) entre os os valores observados e os valores previstos. Critério mais usado: método dos mínimos quadrados.

Regressão Linear Simples



Objetivo das regressões: achar o lugar geométrico dos pontos (ou achar as estimativas dos coeficientes de regressão) que minimiza o conjunto dos erros.

$$\varepsilon_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - g\left(X_i \middle| \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots\right)$$



Regressão Linear Simples

Classificação das regressões

Modelo

- *Linear*: $Y = \alpha + \beta X$
- *Não-Linear*: $Y = \alpha X^{\beta} Z^{\delta}$

Nº de VA's Explicativas

- *Simples*: $Y = \alpha + \beta X + \delta X^2$
- *Múltipla*: $Y = \alpha + \beta X + \gamma Z$

Critérios de Minimização dos Resíduos:

$Min \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$

$Min \sum_{i=1}^{N} |\varepsilon_i|$

$Min \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$ 

Método dos Mínimos Quadrados

Estimação dos coeficientes de regressão

Modelo: $Y = \alpha + \beta X + \varepsilon$

Estimativa: $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X_i + \hat{\varepsilon}_i = a + bX_i + e_i$

$$e_i = y_i - (a + bx_i) = y_i - a - bx_i$$

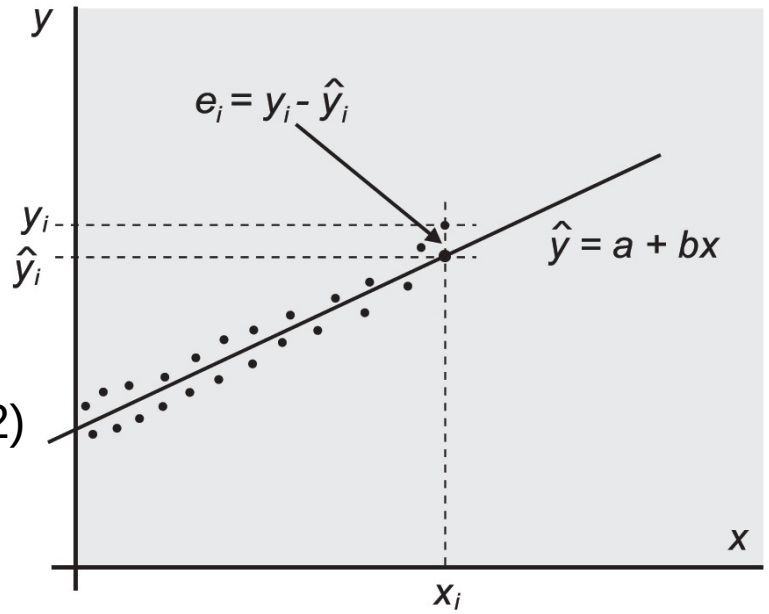
$$e_i^2 = (y_i - a - b.x_i)^2 = y_i^2 - 2.y_i.a - 2.y_i.b.x_i + a^2 + 2.a.b.x_i + b^2.x_i^2$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2.a.\sum_{i=1}^{n} y_i - 2.b.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i + na^2 + 2.a.b\sum_{i=1}^{n} x_i + b^2.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

MMQ: $Min\ Z = Min \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ $\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial b} = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial a} = -2.\sum_{i=1}^{n} y_i + 2.n.a + 2.b.\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial b} = -2.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i + 2.a.\sum_{i=1}^{n} x_i + 2.b.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

*(-1/2)

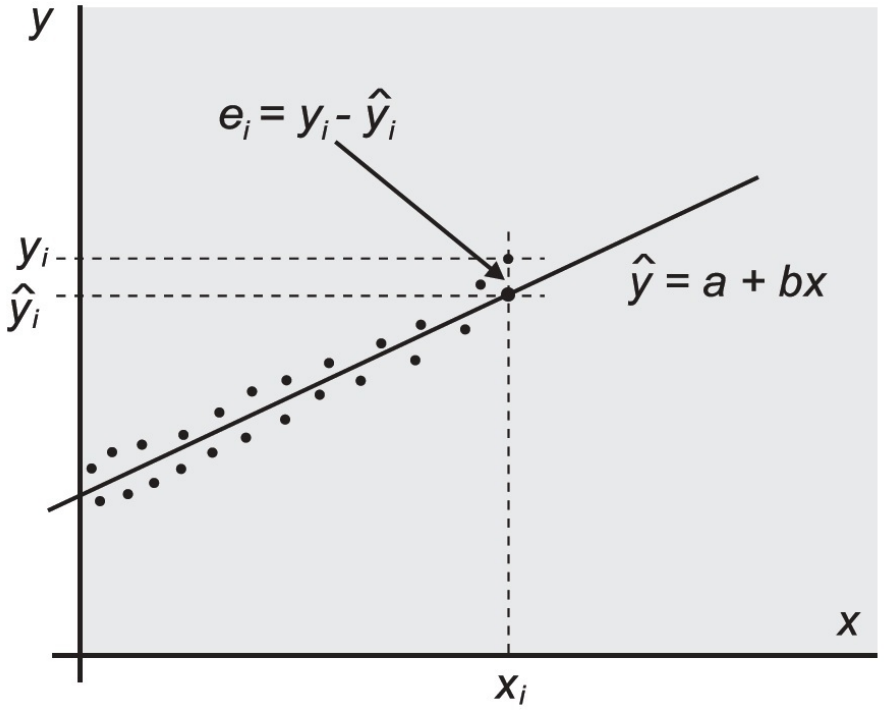


Estimação dos coeficientes de regressão

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i - n.a - b.\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a.\sum_{i=1}^{n} x_i - b.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \end{cases}$$

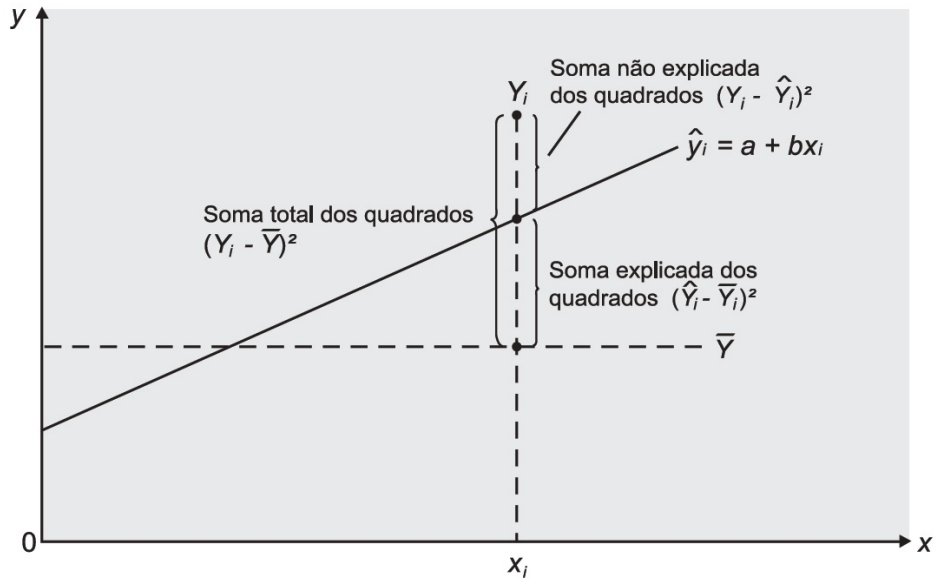
$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - b.\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{y} - b.\bar{x}$$

$$b = \frac{n.\sum_{i=1}^{n} x_i.y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i.\sum_{i=1}^{n} x_i}{n.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$



Coeficiente de Determinação

Qual é a parcela da variância total de *Y* que foi explicada pela regressão com *X* ?



$$y_i = (y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}) + \bar{y}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SQT = SQ\,Res + SQ\,Reg$$

$$r^2 = \frac{Variância\quad Explicada}{Variância\quad Total} = \frac{SQ\,\mathrm{Re}\,g}{SQT} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} \text{ ou}$$

$$r^2 = \frac{SQT - SQ\,\mathrm{Re}\,s}{SQT} = 1 - \frac{SQ\,\mathrm{Re}\,s}{SQT} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

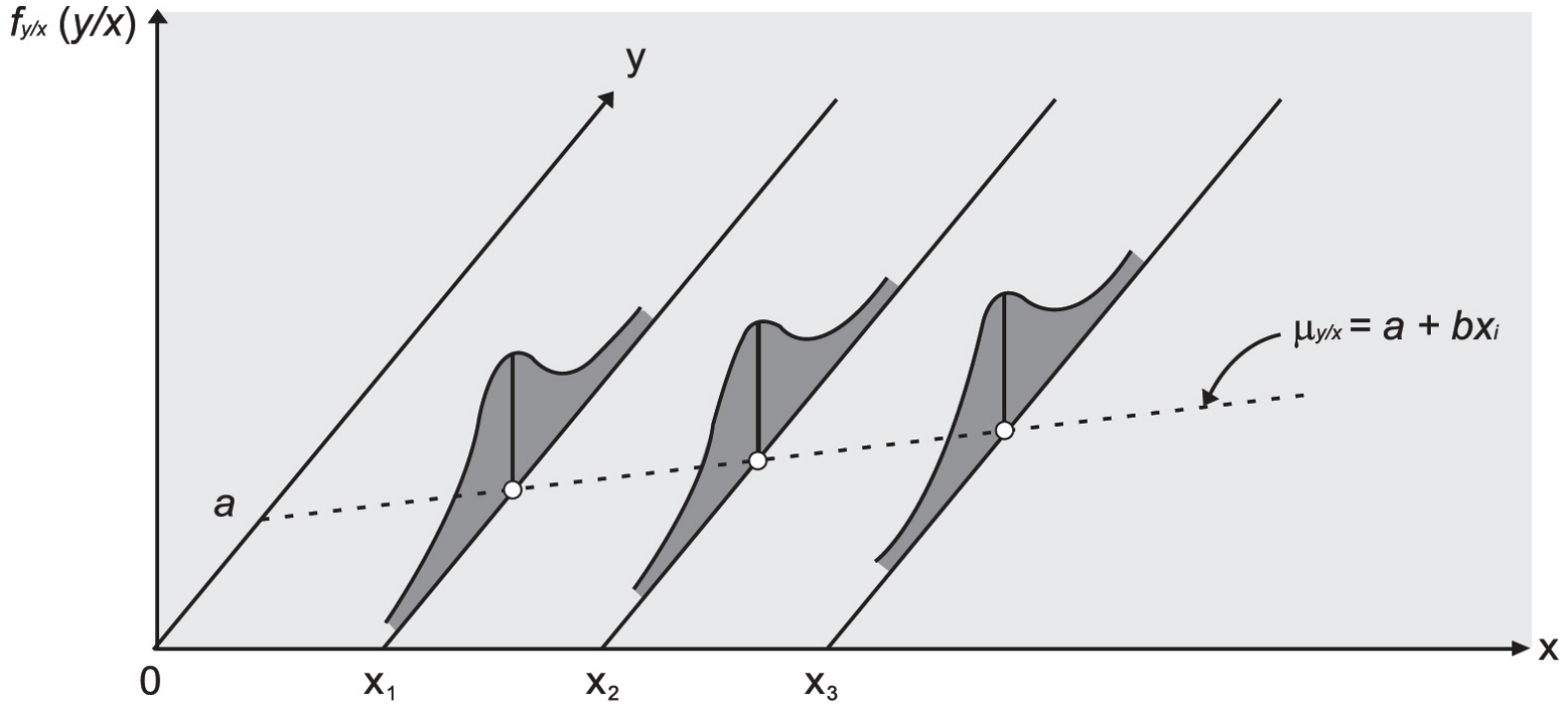
RLS:

$$r^2 = b^2 \frac{s_X^2}{s_Y^2} > 0$$

$$r = \pm\sqrt{r^2} = \langle \text{sinal de } b \rangle \sqrt{r^2}$$

Hipóteses Fundamentais da Regressão (TH+IC)

A linearidade, a normalidade e a homoscedasticidade dos resíduos



$$e_i = y_i - (\alpha + \beta.x_i) \Leftrightarrow \varepsilon \sim N(0, \sigma_e)$$

Implicações:

- O valor esperado do erro é zero $E(e_i) = 0$
- A correlação serial entre os resíduos é nula
- A variância dos resíduos é constante ao longo da variação de *X* (Homocedasticidade)

Erro Padrão da Estimativa

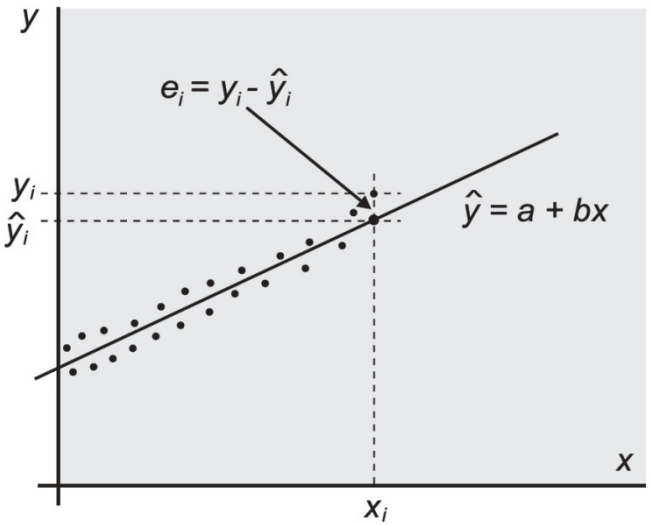
Variância dos Resíduos: $Var(e_i) = \sigma_e^2 = E(e_i^2) - E^2(e_i) = E(e_i^2)$

Ver capítulo 3, equação 3.21, página 75

$E(e_i) = 0$

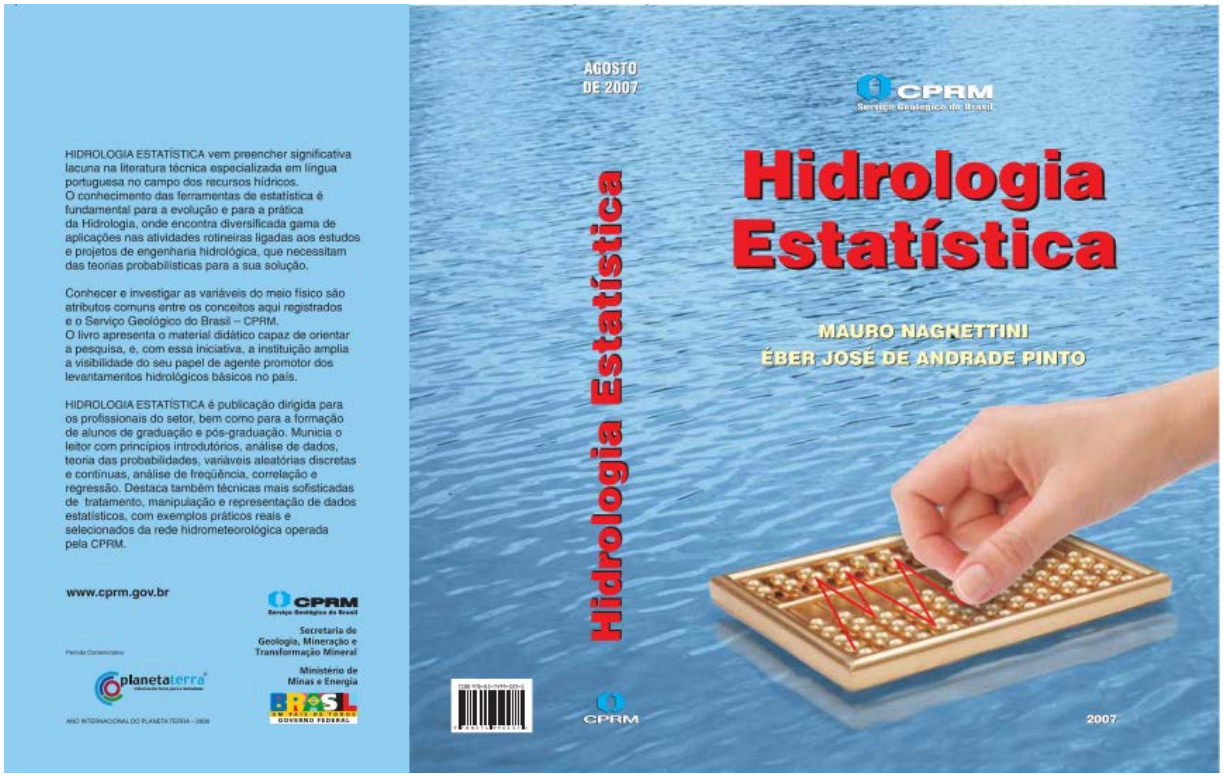
Estimador sem Viés: $\hat{\sigma}_e^2 = s_e^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$

Erro Padrão da Estimativa: $\hat{\sigma}_e = s_e = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}$



Recomendações

Para consolidar conhecimentos estudar no livro texto até o item 9,4, inclusive



http://www.cprm.gov.br/publique/Hidrologia/Mapas-e-Publicacoes/Livro-%22Hidrologia-Estatistica%22-981.html

Serviço Geológico do Brasil – CPRM

Departamento de Hidrologia da CPRM

Eber José de Andrade Pinto
Coordenador Executivo do DEHID
eber.andrade@cprm.gov.br
www.cprm.gov.br

Belo Horizonte, 20 de outubro de 2020