Serviço Geológico do Brasil – CPRM

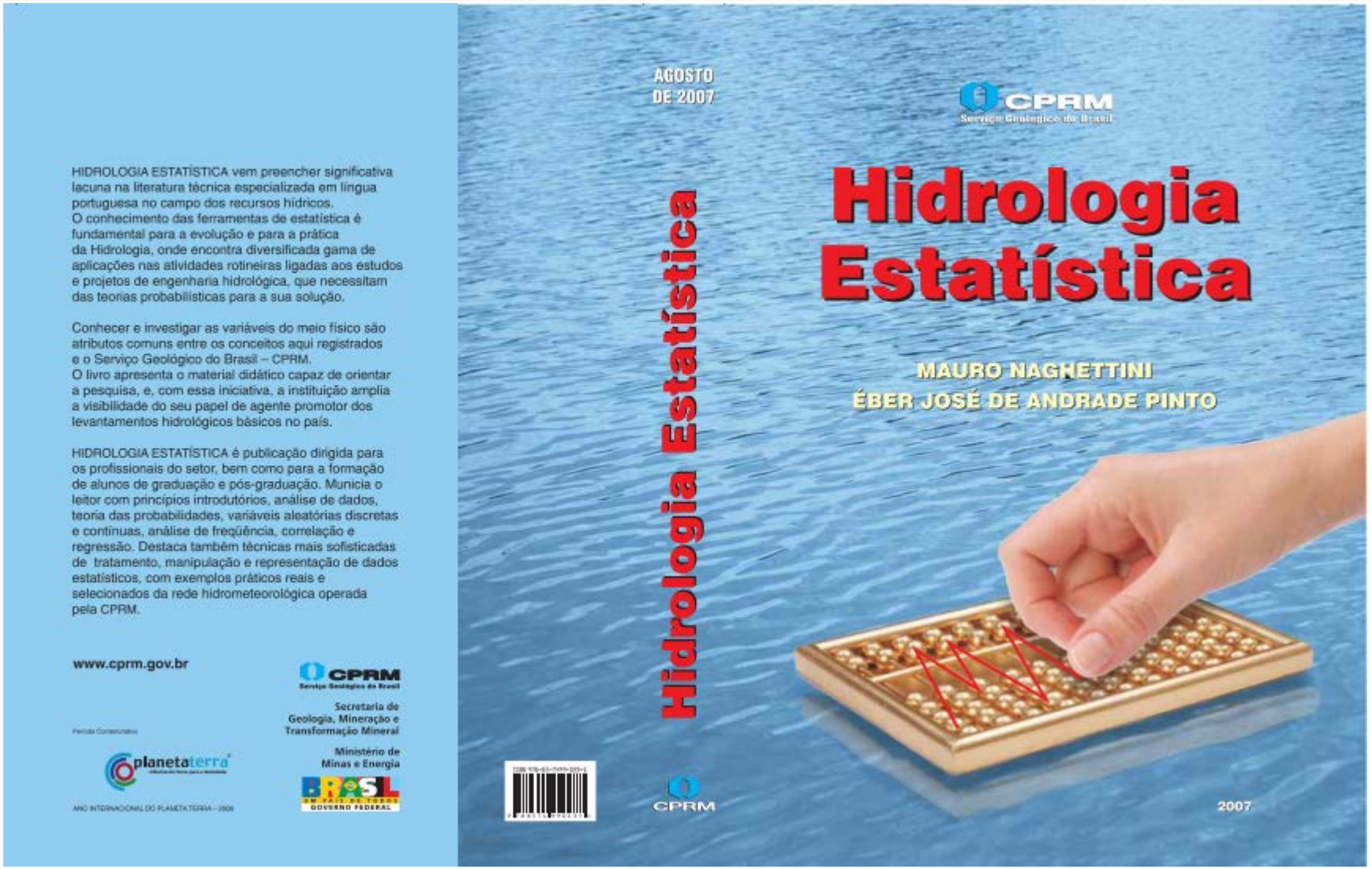
Correlação e Regressão Linear

Aula 01 : Correlação

Eber José de Andrade Pinto
Coordenador Executivo do DEHID
eber.andrade@cprm.gov.br
www.cprm.gov.br

Belo Horizonte, 19 de outubro de 2020

Livro Texto



http://www.cprm.gov.br/publique/Hidrologia/Mapas-e-Publicacoes/Livro-%22Hidrologia-Estatistica%22-981.html

Introdução

Questões típicas da Engenharia de Recursos Hídricos referentes à associação correlativa entre duas ou mais VA's:

(i) intensidades, as durações e as frequências das precipitações intensas;

(ii) vazões médias anuais e áreas de drenagem;

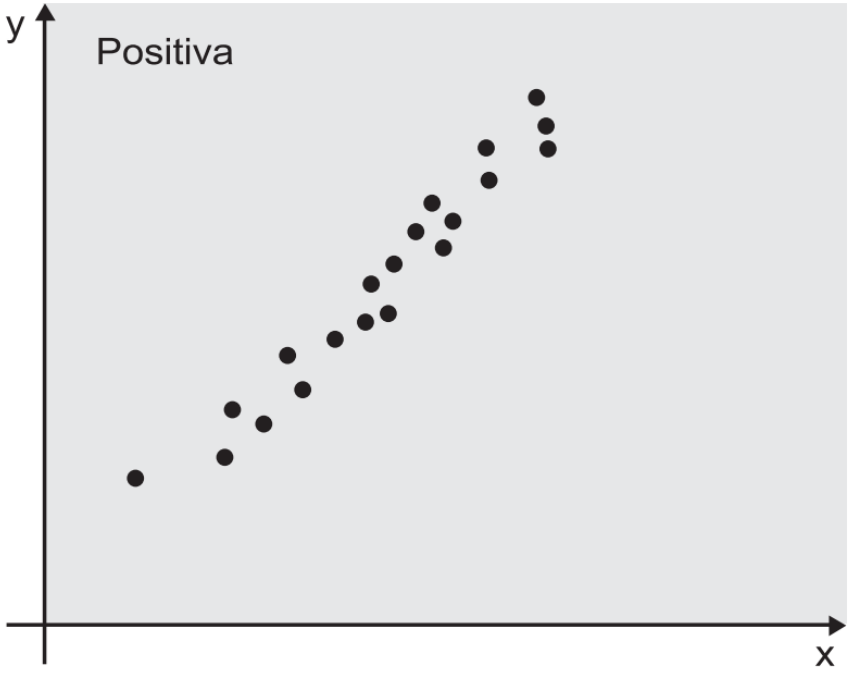
(iii) relação entre séries de cotas e vazões de duas estações próximas.

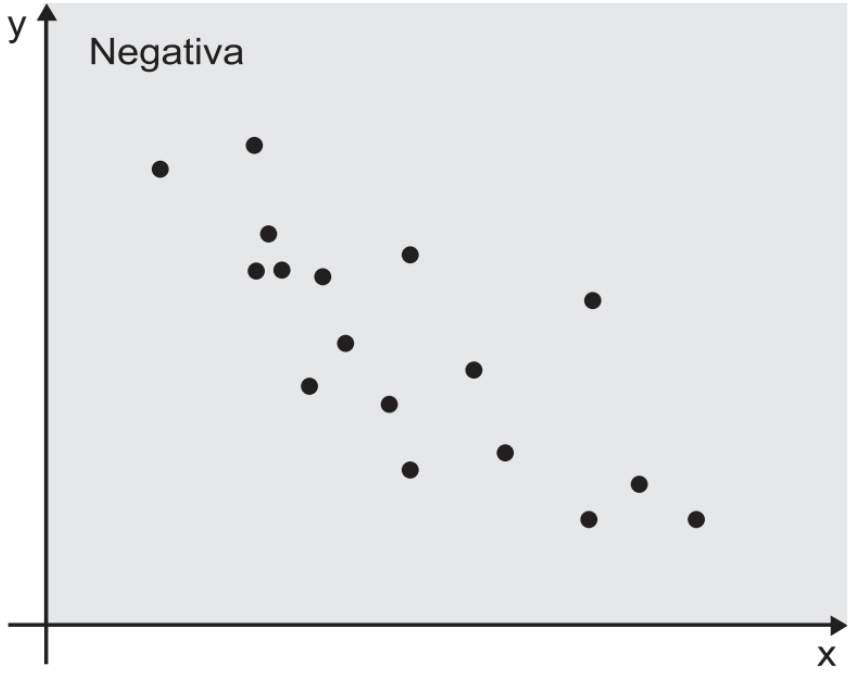
(iv) alturas anuais de precipitação e altitudes dos postos pluviométricos; ou

(v) definição da curva-chave de uma estação fluviométrico

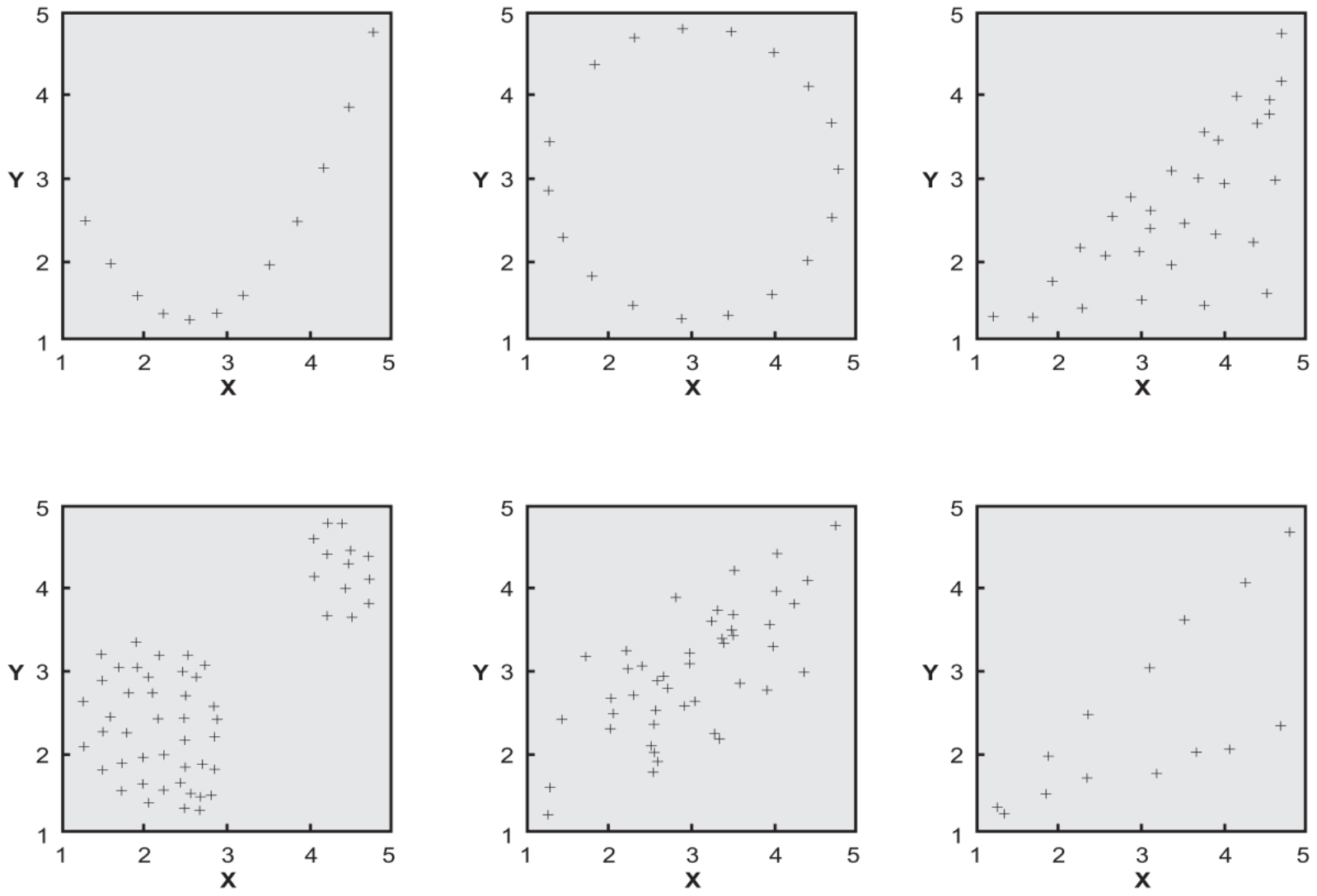
Objetivo 1: Correlação

Analisar o comportamento simultâneo das variáveis, tomadas duas a duas, verificando eventuais associações positivas ou negativas entre elas.





Correlação: Abordagem Exploratória



Correlação: Abordagem Quantitativa

Coeficiente de correlação linear $\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X . \sigma_Y}$

$\rho = 0 \rightarrow$ nenhuma associação linear

$\rho = 1 \rightarrow$ associação positiva linear perfeita

$0 < \rho < 1 \rightarrow$ associação positiva parcial

$\rho = -1 \rightarrow$ associação negativa linear perfeita

$-1 < \rho < 0 \rightarrow$ associação negativa parcial

Comentários:

Forte associação correlativa ≠ causa-efeito

- As evidências de relações causais devem ser obtidas a partir do conhecimento dos processos envolvidos
- Exemplo: A alta correlação entre as vazões máximas de duas bacias vizinhas não significa que a mudança da vazão de uma delas é causada pela alteração da outra (fatores comuns às duas bacias).

Grau de Associação entre as VA's

Coeficiente de Correlação Linear de Pearson:

base → covariância normalizada

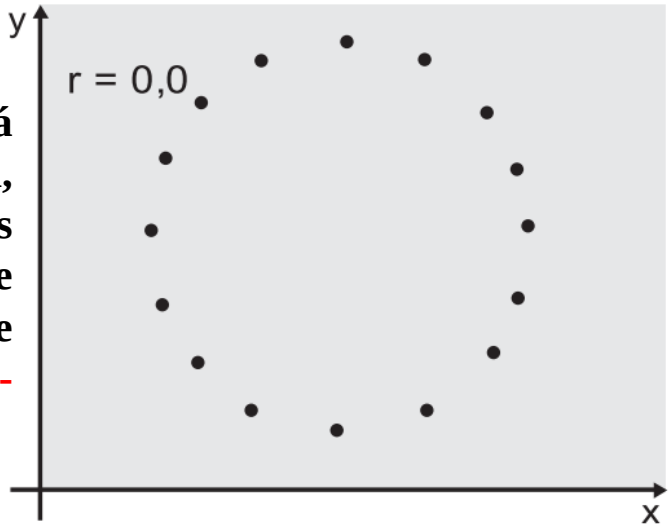
$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{s_x s_y} \Rightarrow -1 \leq r \leq 0 \text{ ou } 0 \leq \text{r} \leq +1$$

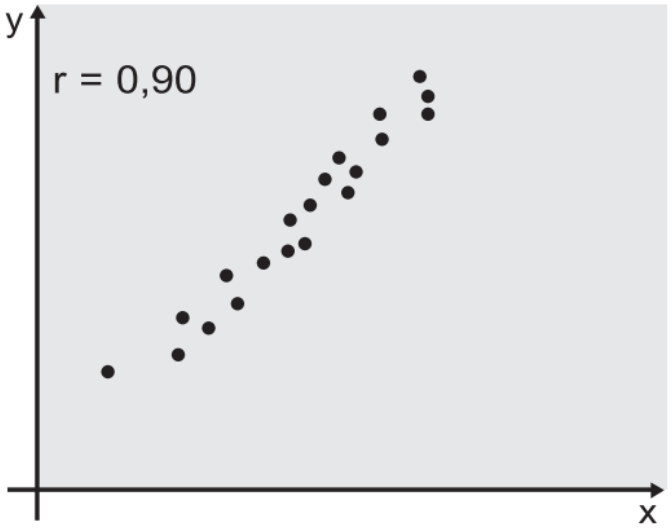
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \qquad s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

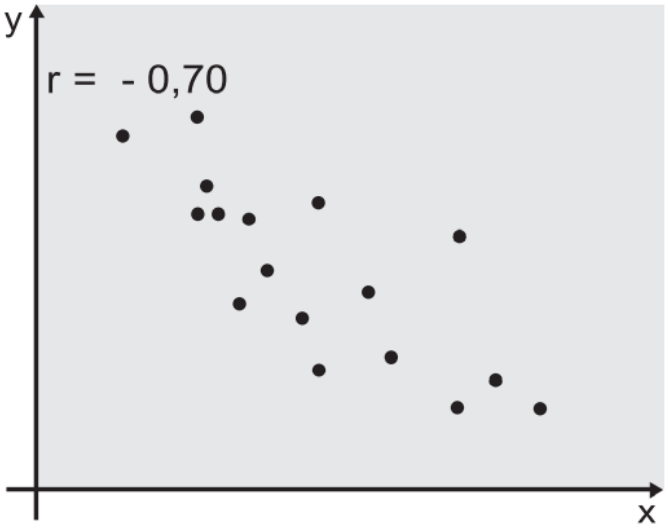
$$s_{xy} = \text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}).(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

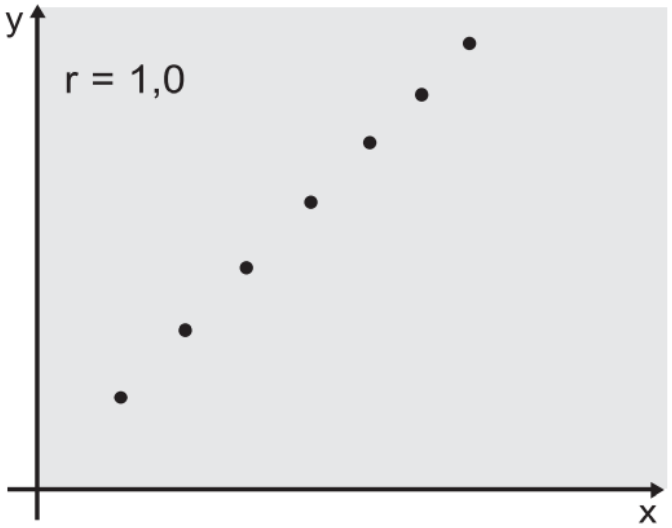
Grau de Associação entre as VA's

Atenção: se *r* = 0, não há correlação linear. Porém, isso não implica que as VA's sejam estatísticamente independentes, pois pode haver dependência não-linear.



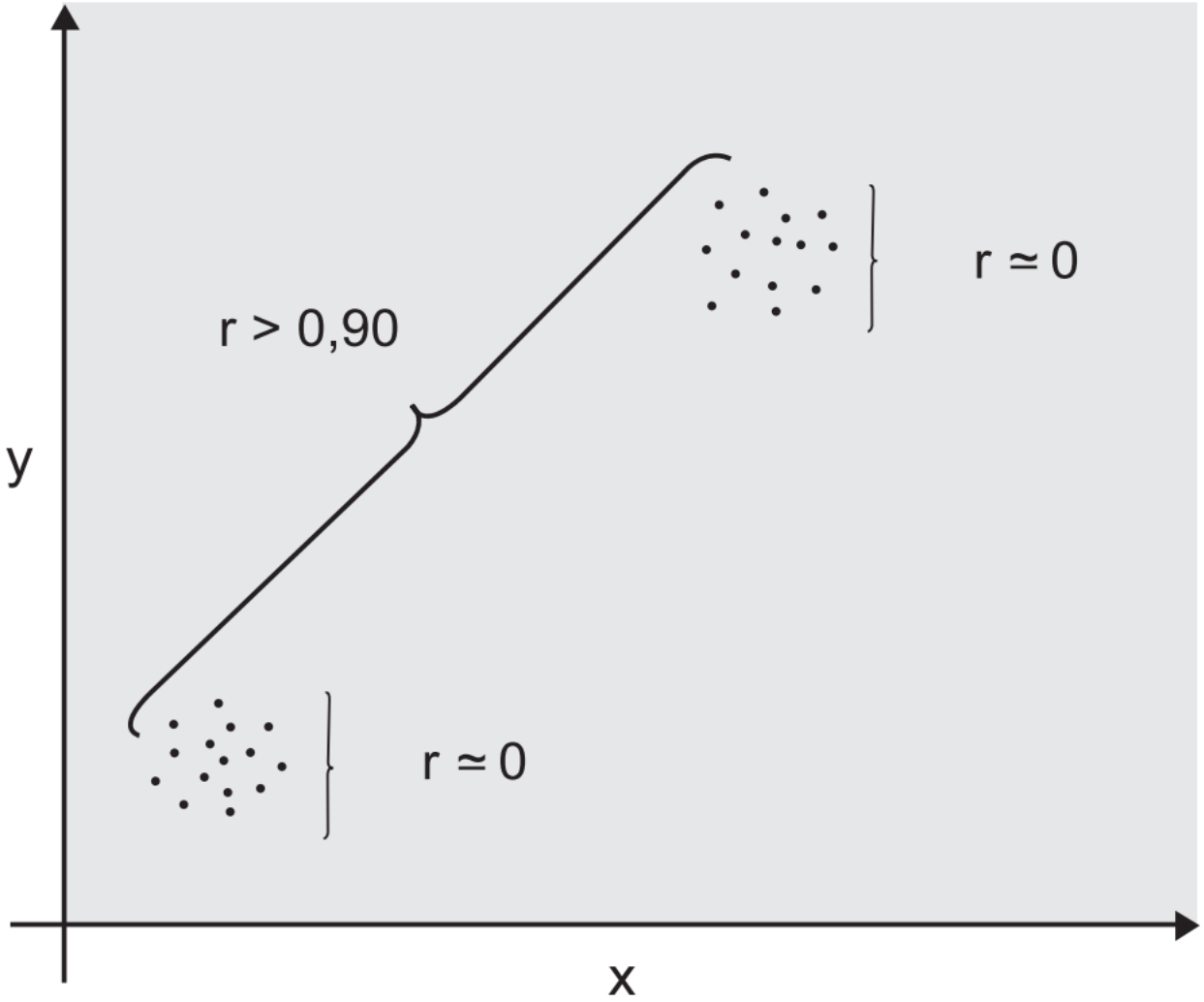






Correlação Espúria

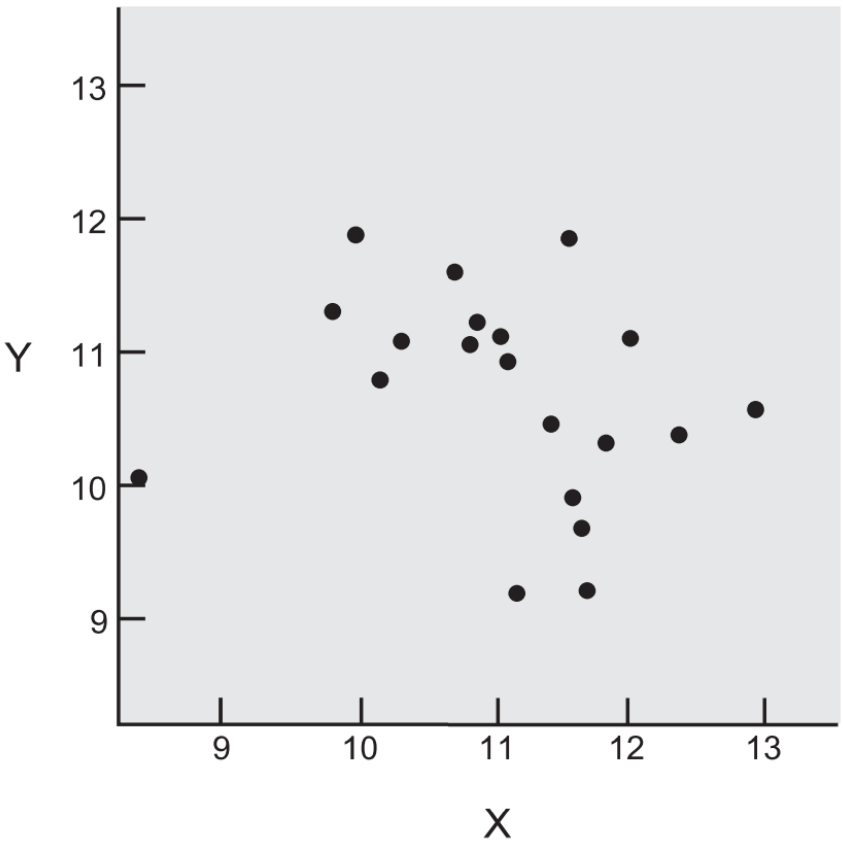
Coeficiente de correlação alto para VA's não correlacionadas

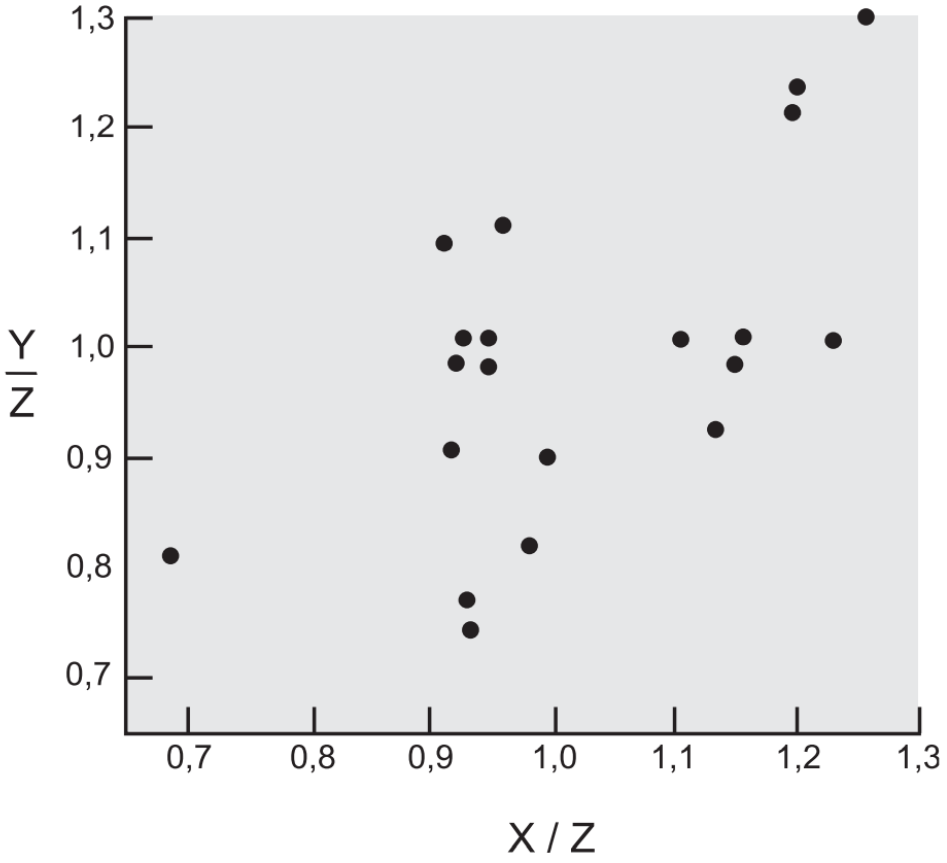


Distribuição Não-Equilibrada dos Pontos Amostrais

Correlação Espúria

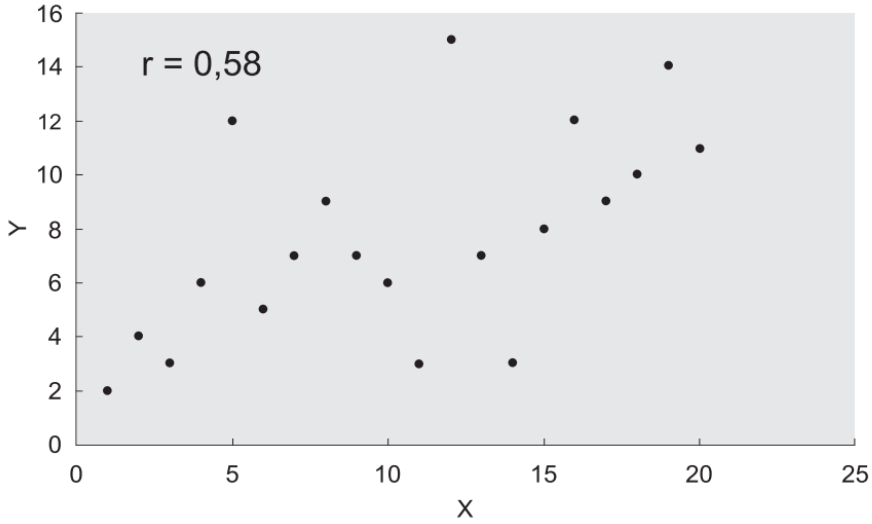
Quocientes de VA's (mesmo denominador)

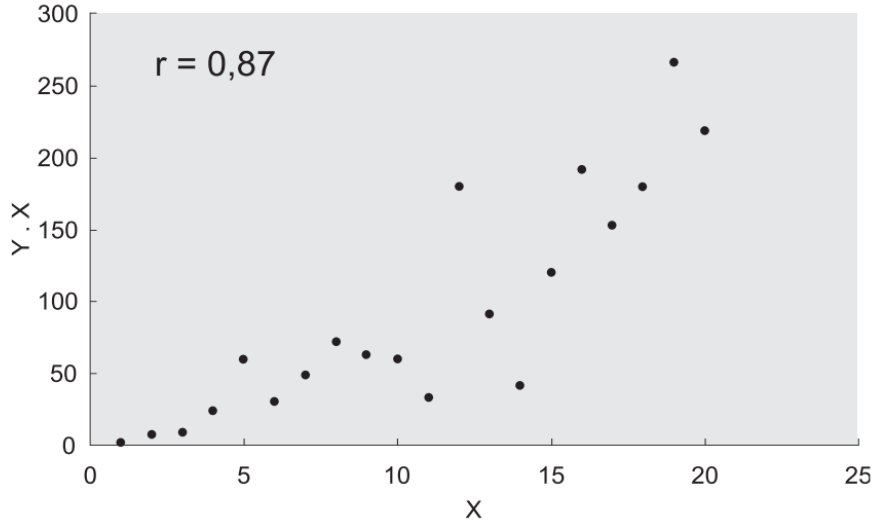




Correlação Espúria

Produtos de VA's (fator dependente)





Benson, M. A. _1965_. "Spurious correlations in hydraulics and hydrology." *J. Hydr. Div.*, 91_4_, 35–42.

Berges, J. A. _1997_. "Ratios, regression statistics, and 'spurious' correlations." *Limnol. Oceanogr.*, 42_5_, 1006–1007.

Brett, M. T. _2004_. "When is a correlation between non-independent variables 'spurious?'" *Oikos*, 105, 647–656

Hao, O. J., and Neethling, J. B. _1987_. "Effect of ratio correlation on data interpretation." *J. Environ. Eng.*, 113_1_, 205–211.

Kenney, B. C. _1982_. "Beware of spurious self-correlations!" *Water Resour. Res.*, 18_4_, 1041–1048.

Shivers, D. E. and Moglen,G. E (2008). Spurious Correlation in the USEPA Rating Curve Method for Estimating Pollutant Loads. J. Environ. Eng., 2008, 134(8): 610-618

Testes de Hipóteses sobre o Coeficiente de Correlação

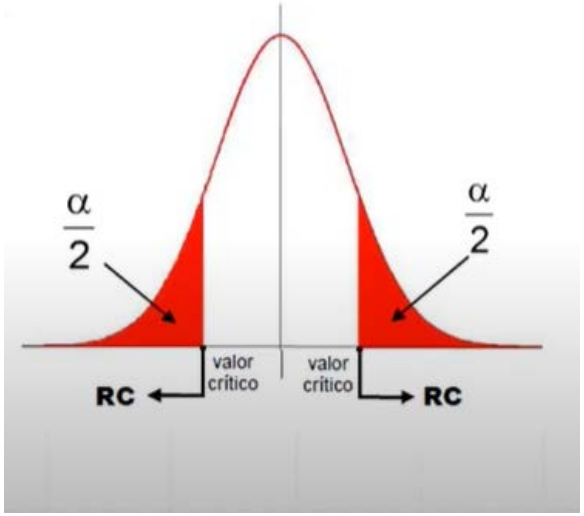
Premissa:

os resíduos $\varepsilon_i = [Y_i - (\alpha + \beta X_i)] \sim N(0, \sigma_\varepsilon)$ com σ_ε constante

Teste 1: (bilateral)

Hipótese Nula: $H_0 : \rho = 0$

Hipótese Alternativa: $H_1 : \rho \neq 0$



Estatística de Teste: $t_0 = \dfrac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$

a qual, sob H_0, segue t de Student com (n-2) gl

Decisão: Rejeitar H_0 se $|t_0| > t_{\alpha/2,n-2}$

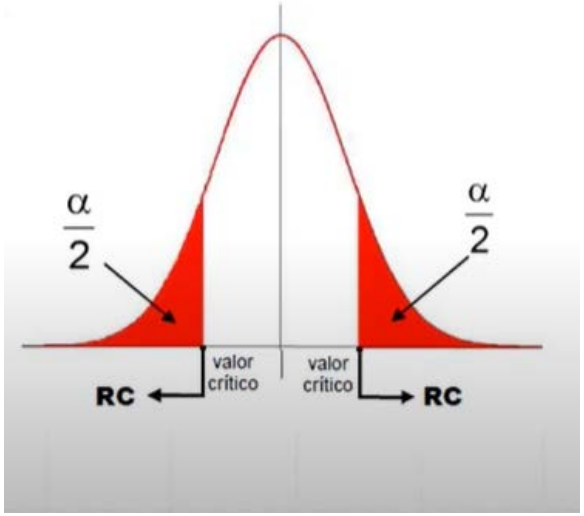
onde, $t_{\alpha/2,n-2}$ é o valor crítico para a estatística do teste para um nível de significância , com (n – 2) graus de liberdade.

Testes de Hipóteses sobre o Coeficiente de Correlação

Teste 2: (bilateral)

Hipótese Nula: $H_0 : \rho = \rho_0$

Hipótese Alternativa: $H_1 : \rho \neq \rho_0$



Estatística de Teste:

$$Z_0 = [arctan\,h(r) - arctan\,h(\rho_0)].(n-3)^{1/2}$$

a qual, sob H_0 e $n > 25$, segue uma distribuição Normal com

$$\mu_Z = arctan\,h(\rho) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \qquad \sigma_Z^2 = (n-3)^{-1}$$

Decisão: Rejeitar H_0 se $|Z_0| > Z_{\alpha/2}$

onde, $Z_{\alpha/2}$ é o valor crítico para a estatística do teste dado pela distribuição normal padrão associada a um nível de significância α

Intervalo de Confiança

É possível construir um intervalo de confiança,$100.(1-\alpha)$, para ρ dado por

$$tanh\left[arctan\, h(r) - \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right] \leq \rho \leq tanh\left[arctan\, h(r) + \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right]$$

onde *r* é o coeficiente de correlação estimado, $Z_{\alpha/2}$ é o quantil da distribuição normal padronizada com um nível de significância α , *n* é tamanho da amostra e

$$tanh(u) = \frac{\left(e^{u} - e^{-u}\right)}{\left(e^{u} + e^{-u}\right)}$$

Comentários Finais:

O procedimento para análise da correlação:

Etapa 1: Determine se existe uma relação de causa e efeito para todos os pares de variáveis a serem testados.

Etapa 2: Plote todas as combinações de uma variável em relação a outra para examinar as realações dos dados.

Etapa 3: Faça ajustes, como transformação de dados, se necessário. Esta etapa é opcional.

Etapa 4: Calcule os coeficientes de correlação linear entre cada par de variáveis. No EXCEL: Função CORREL() e na ferramenta Análise de Dados/Correlação

Serviço Geológico do Brasil – CPRM

Departamento de Hidrologia da CPRM

Eber José de Andrade Pinto
Coordenador Executivo do DEHID
eber.andrade@cprm.gov.br
www.cprm.gov.br

Belo Horizonte, 19 de outubro de 2020